Círculo cultural Educa e Investiga
Paidagogo. Revista de Investigación en Ciencias de la Educación
Vol. 1 No. 2, pp. 102-127
Julio - Diciembre 2019
ISSN: 2789-0074

El método BREL: su eficacia para la resolución de problemas de la teoría de conjuntos

The BREL method: its effectiveness for resolution set theory problems

O método BREL: sua eficácia para resolução problemas de teoria de conjuntos

Milton Orihuela Sosa
https://orcid.org/0000-0003-2961-675X
Universidad Peruana Unión

Bernardo Raúl Acuña Casas
Raul@upeu.edu.pe
https://orcid.org/0000-0003-3531-2189
Universidad Peruana Unión

Recibido: 03 de junio de 2019

Aceptado: 06 de diciembre 2019

Resumen

El presente artículo resume la investigación realizada en el campo de la didáctica de la matemática, cuyo objetivo principal fue medir la eficacia de la aplicación de las tablas bidimensionales BREL, en la resolución de problemas formulados en el dominio de la teoría de conjuntos de los estudiantes del primer año del Instituto de Educación Superior "Nuestra Señora de Lourdes" de Ayacucho. Se aplicó un diseño pre experimental con preprueba y posprueba, cuyo estímulo "el uso de la tabla BREL" se aplicó a la única sección. Para la comprobación de las hipótesis de investigación se utilizaron las hipótesis estadísticas $\mathrm{H_0}$: $\mu_\mathrm{d} \leq 0$, $\mathrm{H_1}$: $\mu_\mathrm{d} > 0$, donde d (d_i) hace referencia a la nueva variable formada por la resta de la nota de salida en el estudiante i menos la nota de entrada que tiene el mismo estudiante; y para la comparación μ_d con 0 se utilizó la prueba **t** para muestras relacionadas. Los resultados corroboraron las hipótesis específicas de que los estudiantes al término del experimento, sus notas del examen de salida superaron significativamente a sus notas del examen de entrada: para la dimensión organización de los conjuntos en las tablas BREL, t=16.462 con 29 gl y p= 0.00 < 0.05; análisis de la secuencia lógica de operaciones con conjuntos en la tabla BRE, t=20.544 con 29 gl y p= 0.00 < 0.05; y visualización de las

operaciones con conjuntos en la tabla BREL, t=20.603 con 29 gl y p= 0.00 < 0.05. A manera de conclusión, la tabla BREL es un instrumento matemático que facilita de manera breve, rápido, eficaz y lógico, realizar una serie de acciones: operaciones con conjuntos, simplificaciones de formulaciones complejas de conjuntos, demostraciones de propiedades del álgebra de conjuntos y en la de resolución de ejercicios y problemas con conjuntos, sin afectar la naturaleza y el rigor matemático de la red de conceptos de la teoría de conjuntos.
Palabras clave: teoría de conjuntos, tabla BREL; resolución de problemas.

Abstract

This article summarizes the research carried out in the field of mathematics didactics, whose main objective was to measure the effectiveness of the application of the two-dimensional BREL tables, in solving problems formulated in the domain of set theory by Students of the first year of the Institute of Higher Education "Our Lady of Lourdes" of Ayacucho. A pre-experimental design with pre-test and post-test was applied, whose stimulus "the use of the BREL table" was applied to the only section. To verify the research hypotheses, the statistical hypotheses H_0: $\mu_d \leq 0$, H_1: $\mu_d > 0$ were used, where d (d_i) refers to the new variable formed by the subtraction of the exit grade in Student i minus the entrance mark that the same Student has; and for the comparison μ_d with 0 the t-test for related samples was used. The results corroborated the specific hypotheses that the Students at the end of the experiment, their exit exam scores significantly surpassed their entrance exam grades: for the dimension organization of the sets in the BREL tables, t = 16,462 with 29 gl and p = 0.00 <0.05; analysis of the logical sequence of operations with sets in the BRE table, t = 20.544 with 29 gl and p = 0.00 <0.05; and visualization of the operations with sets in the BREL table, t = 20.603 with 29 gl and p = 0.00 <0.05. In conclusion, the BREL table is a mathematical instrument that makes it possible in a short, fast, efficient and logical way to perform a series of actions: operations with sets, simplifications of complex formulations of sets, demonstrations of properties of set algebra and in that of solving exercises and problems with sets, without affecting the nature and mathematical rigor of the network of concepts in set theory.
Keywords: set theory, BREL table; Problem resolution.

Resumo

Este artigo sintetiza a investigação realizada no domínio da didática da matemática, cujo principal objetivo foi medir a eficácia da aplicação das tabelas bidimensionais BREL, na resolução de problemas formulados no domínio da teoria dos conjuntos dos alunos do primeiro. ano do Instituto de Ensino Superior “Nossa Senhora de Lourdes” de Ayacucho. Foi aplicado um desenho pré-experimental com pré-teste e pós-teste, cujo estímulo "o uso da mesa BREL" foi aplicado à única seção. Para verificar as hipóteses de pesquisa, foram utilizadas as hipóteses estatísticas H_0: μ_d≤0, H_1: μ_d> 0, onde d (d_i) se refere à nova variável formada pela subtração da nota final do aluno i menos a nota de entrada que o mesmo aluno tem; e para a comparação μ_d com 0 foi usado o teste t para amostras relacionadas. Os resultados corroboraram as hipóteses específicas de que os alunos ao final do experimento, suas notas de exame de saída superaram significativamente suas notas de vestibular: para a dimensão organização dos conjuntos nas tabelas BREL, t = 16.462 com 29 gl ep = 0,00 < 0,05; análise da sequência lógica das operações com conjuntos na tabela BRE, t = 20,544 com 29 gl ep = 0,00 <0,05; e visualização das operações com conjuntos na tabela BREL, t = 20,603 com 29 gl ep = 0,00 <0,05. Em conclusão, a tabela BREL é um instrumento matemático que permite de forma curta, rápida, eficiente e lógica realizar uma série de ações: operações com conjuntos, simplificações de formulações complexas de conjuntos, demonstrações de propriedades da álgebra de conjuntos e no de resolver exercícios e problemas com conjuntos, sem afetar a natureza e o rigor matemático da rede de conceitos na teoria dos conjuntos.

Palavras-chave: teoria dos conjuntos, tabela BREL; resolução de problemas.

Introducción

En el contexto educativo peruano, uno de los cursos de mayor índice de reprobación es la matemática; en su desarrollo de ésta asignatura ha predominado el modelo academicista propio de la enseñanza tradicional del siglo XIX y que se mantiene en ciertos ámbitos académicos especialmente universitarios, trata de impartir la mayor cantidad de conocimientos, metódicamente dispuestos en una rígida planificación, en un ambiente ordenado y prolijo. El maestro, como poseedor del conocimiento debe transmitir al estudiante, que lo recibe en forma pasiva y acrítica, siendo cada vez mejor cuánto más pueda reproducir en forma literal lo incorporado. Es un método no democrático, eficaz en cuanto al cumplimiento de objetivos, pero donde se responde en virtud de una motivación extrínseca que es la de evitar el castigo, y no por el deseo de saber, crear, descubrir, más dinámicas, centradas en el estudiante, al que le permiten un acercamiento más directo a su maestro que es orientador del estudiante en su proceso de aprendizaje activo. Por lo que las mayores dificultades para los estudiantes es la resolución de problemas. Son capaces de resolver mecánicamente las operaciones fundamentales básicas (adición, sustracción, multiplicación y división), pero no saben cómo aplicarlas para la solución de un problema, ya que sólo se les ha enseñado a actuar de forma mecánica, repetitiva sin innovaciones.

La falta de innovaciones por el estudio de la matemática y poco desarrollo de las habilidades, destrezas, estrategias, métodos y otros son obstáculos para el logro de esos propósitos, y constituyen dificultades a las cuales se deben enfrentar sistemáticamente los profesores de educación primaria cuando tienen que desarrollar el área de matemática, durante el desempeño de su profesión.

Es muy importante señalar la justificación del Ministerio de Educación de los resultados de la evaluaciones censales a los estudiantes que se realiza en algunos grados de educación básica regular, que con la incursión de nuevos programas focalizados en que van desarrollando diferentes estrategias metodológicas con la participación activa de los agentes educativos en algunas regiones del país se van observando cambios a nivel de los docentes y en especial en los estudiantes que en su rendimiento académico van mejorando. Esto implica que una de las causas de este problema radica la falta de fortalecimiento de competencias y capacidades a los formadores por parte de los órganos correspondientes y el cambio de actitud de todos los agentes educativos para desarrollar una educación que corresponda a las necesidades e intereses de los educandos lo cual contribuya al desarrollo de la sociedad.

Ante este panorama, el presente trabajo de investigación ha estado orientado a la aplicación de otras formas de trabajo metodológico en el área de matemática, en lo que respecta a los contenidos de la teoría de conjuntos, en la carrera profesional de Educación Primaria, en ese sentido se aplica el método BREL como una estrategia pertinente para el trabajo efectivo de esta área, hecho que ha de ser corroborado al estar relacionado fuertemente con el rendimiento académico de los estudiantes.

Este método de análisis de las relaciones matemáticas entre conjuntos en la solución de problemas tiene como soporte el uso de tablas bidimensionales habituales sólo con una nueva terminología específica en la teoría de conjuntos. En este modelo los elementos de los conjuntos se organizan en tablas bidimensionales, cada de una de ellas con información relativa a un determinado conjunto. Los elementos en la tabla están organizados a su vez en filas y columnas. En las columnas se registran los elementos de los conjuntos componentes, un elemento por cada columna y se repite en las casillas de la columna tantas veces según sea o no elemento conformante del conjunto componentes en la estructura de la operación. Esto conlleva, que en cualquier columna habrá como mínimo un casillero con el registro de un elemento, siendo la posibilidad máxima de que aparezcan en todos los casilleros de la columna. Mientras en las filas se conforman los distintos elementos asociados a cada conjunto, un elemento por cada casillero de la fila. Una fila se forma con todos los elementos que conforman el conjunto. La fila cabecera de la tabla está formada por los nombres de la ordinalidad de los elementos: primer elemento, segundo elemento, hasta el enésimo elemento, especificando de esta manera el esquema de ordenamiento de los elementos. En la columna del borde izquierdo de la tabla se registra todos los conjuntos elementales como los conjuntos compuestos formados a partir de ellos, es claro que se debe incluir el conjunto universal. En la columna del borde derecho de la tabla, en cada casillero, se lista a todos los elementos del conjunto correspondiente registrado en el borde izquierdo. $n \times m$ es el tamaño de la tabla bidimensional, donde n representa el número de conjuntos conformantes en la operación de conjuntos y m el número de elementos que conforma el conjunto universal específico para cada caso.

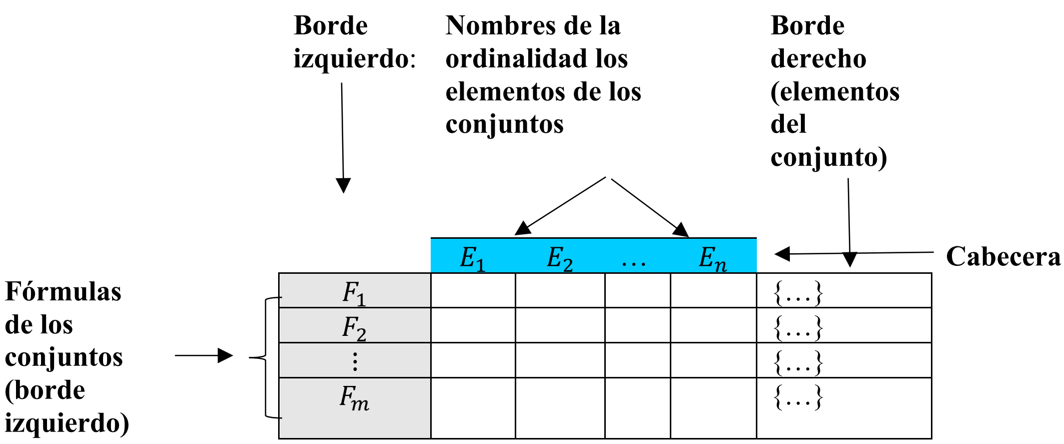


Figura 1. Elementos de la tabla BREL

¿Por qué interesa usar una tabla BREL?

En base a la experiencia de la paliación de este método llevado a cabo en los estudiantes del Instituto de Educación Superior Pedagógico "Nuestra señora de Lourdes" de Ayacucho; se puede analizar con mayor claridad las ventajas de una representación de los elementos frente a una representación por medio de los diagramas de Venn-Euler. La ventaja de utilizar una representación estructurada a base de los elementos de los conjuntos, sean dados expresamente al inicio o determinados artificialmente, por el usuario del método, en el caso que no se especifiquen los elementos de tales conjuntos. Las ventajas de este nuevo método no sólo afectan a los elementos de la tabla sino también al propio uso que se hace de esta representación por parte de los usuarios – estudiantes y docentes. Algunas ventajas son las siguientes: (1) Mayor independencia, en el sentido que los elementos de los conjuntos son independientes de las operaciones de conjuntos que se solicitan en el problema, así también como de los estudiantes. (2) Mayor cobertura, pues se aplica para resolver una mayor variedad de problemas en el área curricular de teoría de conjuntos, desde la verificación de relaciones simples y complejas entre conjuntos; simplificación de fórmulas complejas de conjunto, haciendo así innecesario realizar demostraciones formales basadas en el álgebra de conjuntos; y resolución de problemas de conjuntos donde solicita conocer los elementos de uno o varios conjuntos en concreto. (3) Mayor facilidad de para realizar el examen de la solución, en efecto, resulta más fácil la revisión pues se tiene acceso, de un solo golpe de vista, a la serie secuenciada de operaciones realizadas. (4) Mayor facilidad de orientación del docente, pues todos los estudiantes están manejando el mismo esquema de representación de los elementos de los conjuntos, se produce una verdadera apertura para el trabajo colaborativo durante todo el proceso de solución. (5) Menor redundancia en la extensión de las operaciones, en el sentido de que cada vez que se realiza una nueva operación de conjuntos, no es necesario que se vuelva a escribir nuevamente los elementos de los conjuntos conformantes, sólo basta mirar sus representaciones en las filas anteriores. (6) Mayor eficiencia en la solución de los problemas, esto está relacionado con brindar, a los estudiantes, una mayor confianza y seguridad en el hallazgo de los resultados solicitados, y en la sencillez del trabajo con los elementos de los conjuntos. (7) Mayor acceso al trabajo en equipo, los estudiantes de los grupos de aprendizaje deben preocuparse únicamente en operar bien con los elementos de los conjuntos, disponiendo para ello de la representación sólida y adecuada en la tabla bidimensional.

Teoría de conjuntos y la tabla bidimensional BREL

Todos los temas tratados en la investigación dependen de la teoría de conjuntos, en este sentido, presentaremos en forma muy resumida esta teoría. La mente humana tiene la tendencia de reunir o agrupar objetos encontrando ciertos patrones u ordenamientos. Esta inclinación a agrupar se representa con la idea de conjunto. Sin embargo, las ideas básicas de la teoría de conjuntos fueron recién establecidas por el año 1875 por el matemático alemán George Cantor. La idea de conjunto, también sugieren muchas otras palabras, tales como colección, grupo, reunión. Los objetos pertenecientes a los conjuntos reciben el nombre de elementos del conjunto. Los conjuntos se representan con letras mayúsculas A, B, C, etc. y los elementos con letras minúsculas, separados por comas y encerrados entre llaves. Los conjuntos se determinan, por lo menos de tres maneras: 1) descripción verbal, 2) enumeración o listado, y 3) notación de construcción de conjuntos – se conoce también como notación generadora de conjuntos. Un conjunto dado puede denotarse de forma más conveniente por un método que por otro, empero, la mayoría de conjuntos pueden representarse des tres maneras. Por ejemplo: una descripción verbal: A es el conjunto de los números naturales impares menores que diez. Este mismo conjunto se puede expresarse por enumeración: A = {1, 3, 5, 7, 9} o por comprensión A = {x / x es un número natural impar menor que 10}. Haremos referencia a dos conjuntos especiales: 1) al conjunto que no tiene elementos, se conoce como conjunto vació o nulo y se representa por el símbolo Φ o { }, 2) al conjunto que se toma como referencia para un análisis matemático determinado, en el que se encuentran todos los elementos con los que se trabaja, se conoce como el conjunto universal y se denota con la letra U. Para un conjunto cualesquiera A, todos los elementos de U que no están en A, se representa por A', que se lee “A prima”. Este nuevo conjunto se llama el complemento de A. Simbólicamente, $A' = \{x \ / \ x \in U \ y \ x \notin A\}$

Relaciones entre conjuntos

Igualdad. Dos conjuntos A y B son iguales sí y solo si tienen los mismos elementos, se representa por $A = B$.

Igualdad de conjuntos. El conjunto A es igual al conjunto B, si se cumpla la doble implicación: todo elemento de A es un elemento de B, y todo elemento de B es un elemento de A. Son iguales si contienen exactamente los mismos elementos. La igualdad goza de las siguientes propiedades: $A = A \; \forall A$, si $A = B \Rightarrow B = A$, si $A = B$ y $B = C \Rightarrow A = C$.

Subconjunto de un conjunto. El conjunto A es un subconjunto del conjunto B si cada elemento de A es también un elemento de B. En símbolos: $A \subset B$ si $, \forall x \in A \Rightarrow x \in B$. Parafraseando esta definición sería, si no existen elementos de A que tampoco lo sean de B. Así, $\Phi \subset A$ para cualquier conjunto A. La inclusión de conjuntos goza de las siguientes propiedades: 1) $A \subset A$,∀ A ∃, 2) si $A \subset B$ y $B \subset C$, entonces $A \subset C$, 3) $A \subset B$ y $B \subset A$ sí y solamente si $A = B$.

Operaciones comunes con conjuntos. Sean A y B dos conjuntos cualesquiera: 1) intersección de conjuntos: $A \cap B = \{x \,/\, x \in A$ y $x \in B\}$, 2) unión de conjuntos: $A \cup B = \{x/x \in A$ o $x \in B\}$, 3) diferencia de conjuntos: $A - B = \{x/x \in A$ y $x \notin B\}$, 4) diferencia simétrica: $\mathrm{A} \, \Delta \, \mathrm{B} = (\mathrm{A} - \mathrm{B}) \cup (\mathrm{B} - \mathrm{A})$, o equivalentemente $\mathrm{A} \, \Delta \, \mathrm{B} = (\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) - (\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$. A continuación, se presentan las propiedades más importantes:

$$A \cap \Phi = \Phi$$
$$A \cap A = A$$
$$A \cap U = A$$
$$A \cap B = B \cap A$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$
$$A \cup \; \Phi = \mathrm{A}$$
$$A \cup U = U$$
$$A \cup A = A$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$(A')' = \mathrm{A}, \;\; \Phi' = \mathrm{U}, \;\; \mathrm{U}' = \; \Phi$$
$$(A \cap B)' = \mathrm{A}' \cup \mathrm{B}'$$
$$(A \cup B)' = \mathrm{A}' \cap \mathrm{B}'$$

Conjunto potencia. Dado un conjunto A, se denomina conjunto potencia de A, denotado por $\mathcal{P}(A)$, al conjunto formado por los subconjuntos de A, es decir, todos los conjuntos que pueden formarse a partir de los elementos de A.

Resolución de problemas

Antes de presentar las formas metodológicas para la enseñanza de resolución de problemas se intentará precisar ¿qué es un problema? Se tratará de responder desde dos perspectivas diferentes, pero intrínsecamente coligadas, la primera, proveniente de la psicología cognitiva, y la segunda, surgida de la didáctica de la ciencia.

En la psicología cognitiva, tomando como punto de partida, la idea de Chi y Glaser (1986), podemos decir que un problema es una situación difícil en la que se pretende lograr un objetivo y para alcanzarlo se requiere necesariamente de un medio por parte del estudiante que resuelve. Inicialmente el proceso de solución de problemas, en esta perspectiva psicológica, tuvo dos posturas: 1) el enfoque asociacionista, basada en: las conductas de ensayo/error, las jerarquías de hábitos, atendiendo a la eficacia de cada hábito; y los eslabones de asociación. En la práctica consiste en ir tanteando o variando las cantidades en los posibles rangos de las incógnitas hasta encontrar una combinación o situación particular que calce con las condiciones del problema. En síntesis, es la percepción de algo particular lo que determina la solución del problema sin destacar la organización global. En esta orientación, el aprendizaje ocurre después que el estudiante ha solucionado de forma mecánica una batería de problemas análogos (pensamiento reproductivo), 2) En el enfoque gestalista, un problema es una estructura y la solución es un proceso de hallazgo de relaciones entre las partes para reorganizar y transformar tal estructura, parafraseando, el proceso de solución se inicia con la comprensión de la estructura, en el sentido, de integrar las partes o elementos en un todo coherente en armonía con las condiciones de la meta u objetivo (R. Mayer,1986). En esta integración median de modo notable los procesos de identificación de patrones o esquemas perceptuales. La reorganización acontece cuando una cierta estructura, previamente establecida, no facilita el hallazgo de la solución del problema y, por tanto, es inevitable hallar una nueva reestructuración a las partes de manera que permita conseguir soluciones aceptables. En este enfoque, el pensamiento está guiado por las intuiciones e hipótesis, y está determinado por la capacidad heurística y a analógica del sujeto y por la estructura de la situación–problema. Este hecho de generar soluciones creativas implica ponderar más el pensamiento productivo (insight), de hecho, la experiencia juega un papel importante en el pensamiento productivo, pero no es una condición necesaria y suficiente. Otro detalle en la Gestal es la transferencia o transposición de ciertas relaciones o igualdades descubiertas en determina situación pueden aplicarse creativamente a situaciones parecidas.

La postura más firme y con mayor crédito en la resolución de problemas, en el campo de la psicología cognitiva, es el “procesamiento de la información”, que aborda las explicaciones sobre los procesos utilizados en el dominio de la solución de problemas bien estructurados. En esta corriente, la resolución de problemas se asume como una interacción entre el sistema de procesamiento de la información, la persona que resuelve el problema, y el espacio de la tarea –donde se incluye el estado inicial, estados intermedios y el estado final (Simon, 1978). Otro aporte a la resolución de problema en la psicología cognitiva es la teoría emergente del constructivismo, empezaremos considerando los aportes de Jean Piaget. La teoría piagetiana, sostiene que la comprensión del proceso (mecanismo) de construcción de la estructura mental se apoya en dos presupuestos: 1) el conocimiento es elaborado por las personas al interactuar con el ambiente y del esfuerzo para construir significados, 2) el conocimiento no se adquiere por la internalización de significados que llegan a la mente del sujeto desde afuera, sino desde dentro, a través de representaciones apropiadas. Una estructura mental se produce a través de equilibrios progresivos entre un proceso asimilador y de acomodación adicional, parafraseando, cuando al estudiante se le transfiere una nueva información, por el proceso de asimilación la incorpora al caudal de sus representaciones que ya tiene, si la nueva información produce una contrariedad con sus representaciones se produce un estado de desequilibrio y la persona reorganizará sus representaciones para adaptarlos a la nueva situación. En el proceso de transferencia de conocimientos, el asunto es activar el proceso de equilibración sometiendo a los estudiantes a conflictos cognitivos.

Considerando los aportes posteriores en la perspectiva constructivista del aprendizaje, de L.S, Vygotsky y G.A. Kelly se expondrá las ideas más relevantes por estos autores. Para Vygotsky el desarrollo conceptual puede avistarse como una interacción entre el aprendizaje escolar y la experiencia cotidiana. Se propicia la integración jerárquica entre los conceptos científicos y los conceptos implícitos en el sentido de que cuando el estudiante realiza una sistematización de una parte de la realidad, recurre a los conceptos científicos para integrarlos o anclarlos a sus conceptos implícitos, de manera que sean más eficientes (Vygotsky, 1934). Vygotsky, también introduce el concepto de zona de desarrollo próximo definida como: “la distancia entre el nivel de desarrollo real determinado mediante la resolución independiente de problemas y el nivel de desarrollo potencial estimado a través de la resolución de problemas bajo la guía de un adulto o en colaboración con compañeros más capaces” (Vygotsky, 1978).

El concepto de zona de desarrollo próximo fija la diferencia entre la teoría de Piaget y Vygotsky. Para Piaget el desarrollo es una condición necesaria para el aprendizaje, y para Vygotsky es a través del aprendizaje como las personas logran desarrollarse, en este sentido, la educación formal es determinante en el desarrollo de las personas. Por otro lado, O. Kelly (1995), presenta una nueva perspectiva de cómo se forman las ideas en las personas, denominada "psicología de constructos personales", según el cual, cada persona construye unas representaciones de su entorno real con el objetivo de darle sentido. Estas representaciones permiten describir la experiencia presente y predecir eventos futuros sobre la base de construcción y evaluación de modelos de prueba contrastando con sus criterios personales (teorías implícitas). Las ideas de Kelly fueron ampliadas por G. Claxton (1984), quien sostiene que las acciones e intuiciones de cada persona surgen de las teorías implícitas que tienen sobre la realidad, lo denomina mini-teorías. Claxton caracteriza una teoría con las siguientes premisas: (1) Una teoría es una descripción: es una forma de representar una cosa en términos de algo distinto para hacerla menos compleja y, por lo tanto, más predecible. (2) La mejor teoría depende de lo que se quiera hacer. No existe una teoría "óptima" sobre nada. (3) Las teorías no se pueden refutar. Si una teoría nunca es totalmente correcta, quiere decir que tampoco se puede probar que sea equivocada. (4) Las teorías son siempre incompletas. Es propio de la naturaleza de una teoría ser incompleta, y, por lo tanto, falible y limitada.

De estas premisas, se implica, que el interés fundamental de la persona que aprende se focaliza en la utilidad de su teoría, en saber si funciona. Empero, el interés principal de un científico es saber si su teoría es válida y cuál es su radio de verdad. Aceptando que una teoría nunca es totalmente correcta ni óptima, el constructivismo no escapa a este hecho, estará siempre abierta a polémicas a favor o en contra sobre algunos de sus principios básicos. Sin embargo, sigue ejerciendo un fuerte impacto en el campo de la didáctica de las ciencias, especialmente en la solución de problemas.

Soluciones desde la didáctica de las ciencias

Desde la perspectiva del campo de la didáctica de la ciencia, un problema para los estudiantes es cualquier situación de carácter cualitativo o cuantitativo que se les expone dentro del ámbito escolar para que ellos encuentren una solución -es plausible que existan varias alternativas de soluciones- En este punto de vista, se conoce con cierta claridad a donde se quiere llegar, pero se desconoce el camino.

Existe también la postura de usar la definición que enfatiza el carácter investigativo que requiere este tipo de discusión. Así, una situación es problemática cuando se exige al estudiante acciones o soluciones que no puede suministrar de manera inmediata porque no dispone de los conocimientos específicos o métodos para llegar a la solución, y por consiguiente para llenar esos vacíos se requiere investigar. En el escenario de la enseñanza institucionalizada, el planteamiento de problemas tiene el propósito que el estudiante asimile esquemas mentales organizados por contenidos conceptuales procedimentales y actitudinales, de manera que su integración permita asumir la conducta más adecuada en la solución, En la implicación cognitiva precisará que teorema, lema, corolario o propiedad o va a requerir para el planteamiento; en la implicación procedimental, que operaciones, artificios, métodos, y algoritmos formulará; en la implicación actitudinal, cuál es la orientación de la meta que supone, porqué le es la mejor alternativa de solución. Por las implicancias dadas, es necesario que los problemas escolares estén bien estructurados en función del conocimiento de los estudiantes.

Desde un enfoque didáctico, se asume las ideas de Martínez (1990) para justificar el uso de problemas en la enseñanza de la teoría de conjuntos: (1) Educativos: la resolución de problemas de teoría de conjuntos es un medio activo para el aprendizaje de los conceptos básicos de pertenencia, inclusión, cardinalidad y probabilidad. Es una tarea en gran medida motivante pues los estudiantes se sienten más interesados en la matemática cuando las aplicaciones de la teoría están orientadas, por ejemplo, a la economía y finanzas, ingeniería y ciencias físicas. El estudiante no solo se sentirá motivado por hallar la solución al problema, sino por el aporte que realiza a la comunidad. Paralelamente, en el proceso de solución, irá desaprendiendo sus concepciones implícitas y adoptando los conceptos científicos. (2) Científicos: los estudiantes tienen la oportunidad de familiarizarse con el vocabulario o terminología de matemática y de imitar la manera cómo trabajan los matemáticos, de mirar que el fin de la investigación matemática es ayudar a resolver problemas que el hombre ha ido planteando a lo largo del tiempo en los campos de las ciencias empíricas y de la tecnología. Este tipo de actividades, de hecho, favorece en los estudiantes el desarrollo de las actitudes científicas como la curiosidad, la persistencia, la observación, la voluntad de investigar, etc. (3) Ideológicos: Con la resolución de problemas se procura que los estudiantes transpongan los linderos de la escuela y se habitúen a tratar problemas de la realidad natural y social. Para tal efecto, los problemas que se formulen en la clase tienen que tener una relación con los hechos cotidianos de los estudiantes y despertar en ellos la importancia de los saberes encontrados para aplicarlos a la vida personal, profesional y social. Por ejemplo, problemas relacionados con la vida económica y financiera del hogar, con el crecimiento urbano, con en el sostenimiento del medio ambiente, etc.

En consecuencia, dentro de la investigación donde se encuadra la temática de la teoría de conjuntos ¿cómo se puede enseñar a resolver problemas en ese contexto? La rutina es la siguiente: Paso 1: comprender el problema. Paso 2: identificar los conjuntos elementales, el conjunto universal y el conjunto a determinar. Paso 3: Expresar una fórmula bien estructurada del conjunto a determinar a partir de los conjuntos elementales. Paso 4: Para los cálculos de las operaciones, construir una tabla BREL. Subpaso 1: En la primera columna de la izquierda de la tabla, se denotan los conjuntos elementales que conforman la estructura final del conjunto a determinar, colocándolos de arriba hacia abajo en orden jerárquico de ejecución. Subpaso 2: Respetando el orden de los elementos pívot dado en la fila cabecera, se escribe los elementos de cada conjunto elemental al pie de los elementos pívot. Subpaso 3: Se realizan las operaciones de los conjuntos bien formados de conjuntos elementales en las filas que les corresponden. Subpaso 4: La última operación de conjuntos realizada en el conjunto solución. Paso 5: Comprobar el resultado de las operaciones realizadas e interpretar en la situación del contexto del problema.

Ejercicios y problemas de teoría de conjuntos usando la tabla BREL.

Ejemplo 1. Operaciones de conjuntos

Sean A y B dos conjuntos tales que A = {a, b, c, d, e} y B = {c, d, e, f, g, h}. Hallar: $A \Delta B$.

Solución. Recordar que $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	
A	a	b	c	d	e				{a, b, c, d, e}
B			c	d	e	f	g	h	{c, d, e, f g, h}
U	a	b	c	d	e	f	g	h	{a, b, c, d, e, f, g, h}
$A \cup B$	a	b	c	d	e	f	g	h	{a, b, c, d, e, f, g, h}
$A \cap B$			c	d	e				{c, d, e}
$(A \cup B) - (A \cap B)$	a	b				f	g	h	{a, b, f, g, h}

Gráficamente:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8
A								
B								
U								
$A \cup B$								
$A \cap B$								
$(A \cup B) - (A \cap B)$								

Respuesta: $A \,\Delta\, B = \{a, b, f, g, h\}$

Ejemplo 2. Simplificación de una expresión

Debe recordarse, el conjunto universal es el conjunto referencial que contiene a todos los conjuntos referenciados en un problema o en un ejercicio. Generalmente se asume como la unión de todos ellos. El número de elementos del conjunto universal depende del número de conjuntos que hay en la formulación de la expresión de conjuntos. Plateamos el siguiente criterio:
$n \geq 2$, donde n es el número de conjuntos;

$\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i}$ indica el número de elementos del conjunto universal. Para n=2, n=3 y n=4 conjuntos, resulta:

$\sum_{i=1}^{2} \binom{2}{i} = \binom{2}{1} + \binom{2}{2} = 2 + 1 = 3$ elementos. Esto indica, de derecha a izquierda: 1 columna con dos casilleros con una misma letra y 2 columnas con un casillero con una sola letra.

$\sum_{i=1}^{3} \binom{3}{i} = \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 3 + 3 + 1 = 7$ elementos. Esto indica, de derecha a izquierda: 1 columna con tres casilleros con una misma letra; 3 columnas con dos casilleros con una misma letra y; 3 columnas con un casillero con una letra.

$\sum_{i=1}^{4} \binom{4}{i} = \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 4 + 6 + 4 + 1 = 15$ elementos. Esto indica, de derecha a izquierda: 1 columna con cuatro casilleros con una misma letra; 4 columnas con tres casilleros con una misma letra; 6 columnas con dos casilleros con una misma letra y; 4 columnas con un casillero con una letra.

Simplificar: [A ∩(A Δ C)] ∪ [(B ∩ C)′ ∩ A] ∪ [B ∪ (A ∩ B')]
Solución

En la expresión dada hay 3 conjuntos diferentes A, B y C, por los tanto el conjunto universal tiene 7 elementos, su distribución en la tabla BREL es la siguiente:

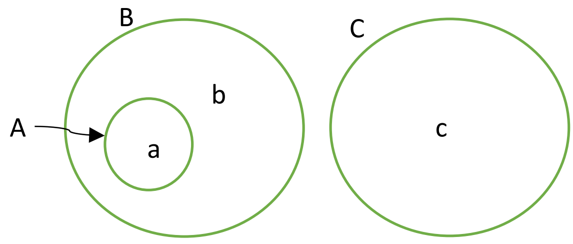
Conjuntos y sus formulaciones	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	
U	a	b	c	d	e	f	g	{a, b, c, d, e, f, g}
A	a	b	c		e			{a, b, c, e}
B	a	b		d		f		{a, b, d, f}
C	a		c	d			g	{a ,c, d, g}
$A \cup C$	a	b	c	d	e		g	{a, b, c, d, e, g}
$A \cap C$	a		c					{a, c}
$A \Delta C$		b		d	e		g	{b, d, e, g}
$E = A \cap (A \Delta C)$		b			e			{b, e}
$B \cap C$	a			d				{a, d}
$(B \cap C)'$		b	c		e	f	g	{b, c, e, f, g}
$F = (B \cap C)' \cap A$		b	c		e			{b, c, e}
B'			c		e		g	{c, e, g}
$A \cap B'$			c		e			{c, e}
$G = B \cup (A \cap B')]$	a	b	c	d	e	f		{a, b, c, d, e, f}
$E \cup F \cup G$	a	b	c	d	e	f		$\{a.b.c, d, e, f\} = A \cup B$

Respuesta: $A \cup B$

Ejemplo 3. Simplificación de una expresión de conjuntos con condiciones iniciales.

Simplificar: [A∪ (B-C)]∩[B∪(C-A)] sabiendo que A ∩ B’=∅ y que A∩C=∅
De las condiciones deducimos:

i. Si $A \cap B' = \emptyset \rightarrow A \subset B$
ii. Si $A \cap C = \emptyset \rightarrow A$ y C son disjuntos



Solución BREL

Conjuntos y sus formulaciones	E1	E2	E3	
A	a			{a}
B	a	b		{a, b}
C			c	{c}
U	a	b	c	{a, b, c}
$B - C$	a	b		{a, b}
$A \cup (B - C)$	a	b		{a, b}
$C - A$			c	{c}
$B \cup (C - A)$	a	b	c	{a, b, c}
[A∪ (B-C)]∩[B∪(C-A)]	a	b		{a, b}

Respuesta: B

Ejemplo 4. Demostración de una propiedad

El asunto no es recurrir a una demostración que se sustente en una argumentación deductiva secuencial, traducida en una cadena finita de proposiciones verdaderas, que se derivan con ayuda de reglas de inferencia lógica. Si no, se trata de una verificación, vía la comparación de los elementos que conforman los conjuntos de ambos lados de la igualdad.

Demostrar que: $(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C}) - (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \,\Delta\, \boldsymbol{B}) \cup (\boldsymbol{B} \,\Delta\, \boldsymbol{C})$

Solución BREL

Conjuntos y sus formulaciones	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	
U	a	b	c	d	e	f	g	{a, b, c, d, e, f, g}
A	a	b	c		e			{a, b, c, e}
B	a	b		d		f		{a, b, d, f}
C	a		c	d			g	{a ,c, d, g}
$A \cup B \cup C$	a	b	c	d	e	f	g	{a, b, c, d, e, f, g}

$A \cap B \cap C$	a							{a}
$(A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$		b	c	d	e	f	g	{b, c, d, e, f, g}
$A \cup B$	a	b	c	d	e	f		{a, b, c, d, e, f}
$A \cap B$	a	b						{a, b}
$A \,\Delta\, B$			c	d	e	f		{c, d, e, f}
$B \cup C$	a	b	c	d		f	g	{a, b, c, d, f, g}
$B \cap C$	a			d				{a, d}
$B \,\Delta\, C$		b	c			f	g	{b, c, f, g}
(A Δ B) ∪ (B Δ C		b	c	d	e	f	g	{b, c, d, e, f, g}

Ejemplo 5. Solución de un problema

En el aula de segundo grado hay 15 niños de los cuales: 8 practican vóley, 9 practican futbol y 3 no practican ningún deporte. ¿Cuántos practican sólo vóley? ¿Cuántos practican sólo fútbol?

Solución BREL

Conjuntos	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9	E_{10}	E_{11}	E_{12}	E_{13}	E_{14}	E_{15}	n
U	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	15
$(V \cup F)'$													m	n	o	3
V	a	b	c	d	e	f	g	h								8
F				d	e	f	g	h	i	j	k	l				9
V'									i	j	k	l	m	n	o	7
F'	a	b	c										m	n	o	6
$V \cap F'$	a	b	c													3
$F \cap V'$									i	j	j	l				4

Respuesta: sólo vóley 3 niños y sólo fútbol 4 niños.

Ejemplo 6

Un grupo de amas de casa compran carne para preparar el almuerzo, 8 amas de casa compran gallina, 11 res, 12 pescado, 2 compran las tres clases de carne, 3 gallina y pescado, 4 gallina y res, y 7 pescado y res. ¿Cuántas amas de casa compran una sola clase de carne?

Solución BREL

Conjuntos	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9	E_{10}	E_{11}	E_{12}	E_{13}	E_{14}	E_{15}	
U	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	0	
$(V \cup F)'$													m	n	0	
V	a	b	c	d	e	f	g	h								
F				d	e	f	g	h	i	j	k	l				
V’									i	j	k	l	m	n	o	
F’	a	b	c										m	n	o	
$V \cap F'$	a	b	c													
$F \cap V'$									i	j	j	l				

	Solo P	Solo R	Solo C	P∩R	$P\cap C$	$R\cap C$	$P\cap R \cap C$	
P	6			12	8		15	41
R		14		12		10	15	51
C			9		8	10	15	42
U	6	14	9					

6+14+9 = 29 amas de casa

Ejemplo 7

De un grupo de 109 comerciantes, 45 venden pantalones, faldas 47, camisas 49, pantalones y camisas 12, faldas y camisas 14; y pantalones y faldas 10. ¿Cuántos venden las 3 clases de prenda?

	Solo P	Solo F	Solo C	$P\cap F$	$P\cap C$	$F\cap C$	$P\cap F\cap C$		
P	A			10-x	12-x		x	45	45+47+49= 141
F		b		10-x		14-x	x	47	
C			c		12-x	14-x	x	49	=141-109=32
U	A	b	c	10-x	12-x	14-x	x	109	

10-x + 12-x + 14-x + x +x = 32

- x = 32 – 36 → x= 4

Respuesta: venden las 3 clases de prenda 4 comerciantes

De 150 estudiantes de una universidad 80 aprobaron Matemática, 86 aprobaron física y 92 aprobaron química. Si 64 aprobaron exactamente 2 asignaturas ¿Cuántos estudiantes aprobaron las tres asignaturas? (olimpiadas matemáticas)

- **Solución**

- N = 150 estudiantes
- 80 aprobaron M
- 86 aprobaron F
- 92 aprobaron Q
- 64 aprobaron exactamente dos asignaturas.
-

	Solo M	Solo F	Solo Q	$M\cap F$	$M\cap Q$	$F\cap Q$	$M\cap F\cap Q$		
M	a			x		z	w	80	80 + 86 + 92 = 258
F		b		x	y		w	86	258 – 150
Q			c		y	z	w	92	= 108
U	a	b	c	x	y	z	w	150	

-

- x +y + z + 2w = 258- 150
- 64 + 2w =108
- 2w = 108 -64
- 2w= 44
- w = 22

Respuesta: Las tres asignaturas aprobaron 22 estudiantes

Método

Se aplicó un estudio pre experimental porque no hubo la posibilidad de manipular la variable independiente, desde que el Instituto Pedagógico “Nuestra Señora de Lourdes contó, en ese periodo académico, con una sola sección de 30 estudiantes. Por consiguiente, para dicha sección, se administró la aplicación de las tablas BREL a la resolución de problemas de conjuntos y después aplicar una medición en la variable y en cada una de sus dimensiones (subvariables) para observar cuál es el nivel de los estudiantes en esas variables en comparación con el nivel de partida, previa al tratamiento experimental (Hernández, 2010). El diseño correspondiente es de preprueba/posprueba con un solo grupo, su diagrama es:

$$G \qquad O_1 \qquad X \qquad O_2$$

La población seleccionada estuvo conformada por todos los estudiantes matriculados en el 2017 I ciclo en la carrera profesional de educación primaria EIB del Instituto de Educación Superior Pedagógico Público “Nuestra señora de Lourdes” en el área curricular de matemática.

Para recoger los datos, tanto al inicio como al final, se aplicaron pruebas escritas equivalentes con ítemes para evaluar las tres dimensiones, y para determinar sus confiabilidades se usó el método “prueba subdividida” (fórmula de Spearman-Brown). La guía didáctica fue validada por los docentes coautores del método BREL

Para comparar las medias de las notas, se seleccionó la prueba t de Student para muestras relacionadas debido a que el tamaño de la población es pequeño ($n<50$). Para explorar la normalidad de las distribuciones de las notas, se usó la prueba de inferencial de Shapiro-Wilk, que es una prueba para muestras pequeñas ($n<50$). Para ambos exámenes, tanto de inicio como final, las distribuciones de notas son distribuciones normales: para el examen inicial se obtuvo un estadístico de 0.942 de 30 g. l. y un p-valor igual a 0.105; para el examen final se obtuvo un estadístico de 0.990 de 30 g. l. y un p-valor igual a 0.093.

Resultados

Para la prueba de las hipótesis, se comparó la diferencia de medias formadas por la nota del examen (dimensión del examen) de entrada en el estudiante i menos la nota que tiene ese mismo estudiante en el examen (dimensión del examen) de salida, usando la prueba t de Student para muestras apareadas o relacionadas. Las dimensiones consideradas fueron: organización de conjuntos en la tabla BREL, análisis de la secuencia lógica de operaciones con conjuntos en la tabla BREL, y visualización de las operaciones con conjuntos en la tabla BREL. Para el tratamiento estadístico se usó el SPSS versión 18.

Primera hipótesis: notas del examen de resolución de problemas, dimensión: organización de conjuntos en la tabla BREL.

Tabla 1.
Prueba de muestras relacionadas para las notas de resolución de problemas, dimensión: organización de conjuntos en la tabla BREL.

Primera dimensión de resolución de problemas con conjuntos	Diferencias relacionadas					t	gl	Sig. (bilateral)
	Media	Desviación estándar	Media de error estándar	95% de intervalo de confianza de la diferencia				
				Inferior	Superior			
Notas de organización de conjuntos salida – Notas de organización de conjuntos entrada	5,700	1,896	0,346	4,992	6,408	16,462	29	0,000

Variable de diferencias relacionadas: $d_i = Notas\ organización2_i - Notas\ organización1_i,\ i = 1,2, \dots 30$. De esta variable obtenemos su media 5.7 con desviación estándar 1.896 y con intervalo de confianza para la media con un nivel del 95% de (4.992, 6.408).

Con contrastes:

H_1: μ (notas del 1er examen dimensión organización) $=$ μ (notas del 2do examen dimensión organización)

H_1: μ (notas del 1er examen dimensión organización) $\neq$ μ (notas del 2do examen dimensión organización)

O equivalentemente

H_1: μ (diferencia entre notas del 2do y 1er examen, dimensión organización) $\neq 0$
H_1: μ (diferencia entre notas del 2do y 1er examen, dimensión organización) $\neq 0$.

Se concluye, con un estadístico de contraste t de Student de16.462 con 29 grados de libertad y una significación de $p = 0.000 < 0.05$, rechazamos para un nivel de significación del 5 % la hipótesis nula y aceptamos la hipótesis alterna; es decir, que hay diferencias significativas en cuanto a las notas obtenidas en el segundo y el primer examen sobre resolución de problemas de conjuntos -dimensión organización de conjuntos en la tabla

BREL. De la misma manera, en el intervalo de confianza para la variable de las diferencias $0 \notin I = (4.992, 6.408)$, por lo cual se confirma la desigualdad de medias al 95% de confianza. Desde que $\mu_2 - \mu_1 > 0$, se tiene $\mu_2 > \mu_1$, esto es, la media de las notas del segundo examen es mayor que la media de las notas del primer examen sobre solución de problemas de conjuntos en la dimensión organización de los conjuntos en la tabla BREL.

Segunda hipótesis: notas del examen de resolución de problemas, dimensión: análisis de la secuencia lógica de operaciones con conjuntos en la tabla BREL.

Tabla 2.
Prueba de muestras relacionadas para las notas del examen de resolución de problemas, dimensión: análisis de la secuencia lógica de operaciones con conjuntos en la tabla BREL.

Segunda dimensión de resolución de problemas con conjuntos	Diferencias relacionadas					t	gl	Sig. (bilateral)
	Media	Desviación estándar	Media de error estándar	95% de intervalo de confianza de la diferencia				
				Inferior	Superior			
Notas de análisis de la secuencia lógica salida – Notas de análisis de la secuencia lógica entrada	6,067	1,617	,295	5,463	6,671	20,544	29	0,000

Variable diferencias relacionadas: $d_i = Nota\ análisis2_i - Nota\ análisis1_i, i = 1,2, \ldots 30$.
De esta variable obtenemos su media 6.1 con desviación estándar 1.617 y con intervalo de confianza para la media con un nivel del 95% de (5.463, 6.671).

Con contrastes:

H_0: μ (notas del 1er examen dimensión análisis) = μ (notas del 2do examen dimensión análisis)
H_1: μ (notas del 1er examen dimensión análisis) $\neq$ μ (notas del 2do examen dimensión análisis)

O equivalentemente

H_0: μ (diferencia entre notas del 2do y 1er examen dimensión análisis) = 0
H_1: μ (diferencia entre notas del 2do y 1er examen dimensión análisis) $\neq$ 0

Concluimos, con un estadístico de contraste t de Student de 20.544 con 29 grados de libertad y una significación de $p = 0.000 < 0.05$, rechazamos para un nivel de significación del 5 % la hipótesis nula y aceptamos la hipótesis alterna; es decir, que hay diferencias significativas en cuanto a las notas obtenidas en el segundo y el primer examen sobre resolución de problemas de conjuntos, dimensión **a**nálisis de la secuencia lógica de operaciones con conjuntos en la tabla BREL. Igualmente, en el intervalo de confianza para la variable de las diferencias $0 \notin I = (5.463, 6.671)$, por lo cual se ratifica la desigualdad de medias al 95% de confianza. Como, $\mu_2 - \mu_1 > 0$, luego $\mu_2 > \mu_1$, la media de las notas de la segundo examen es mayor que la media de las notas del primer examen sobre resolución de problemas de conjuntos, dimensión análisis de la secuencia lógica de operaciones con conjuntos en la tabla BREL.

Tercera hipótesis: notas del examen de resolución de problemas, dimensión: visualización de las operaciones con conjuntos en la tabla BREL.

Tabla 3.
Prueba de muestras relacionadas para las calificaciones del examen de resolución de problemas, dimensión: visualización de las operaciones con conjuntos en la tabla BREL.

	Diferencias relacionadas							
Tercera dimensión de resolución de problemas con conjuntos	Media	Desviación estándar	Media de error estándar	95% de intervalo de confianza de la diferencia Inferior	Superior	t	gl	Sig. (bilateral)
Notas de visualización de operaciones lógicas salida – Notas de visualización de operaciones lógicas entrada	5,967	1,586	0,290	5,374	6,559	20,603	29	0,000

Variable diferencias relacionadas: $d_i = Nota\ visualización2_i - Nota\ visualización1_i$, $i = 1,2, \dots 30$. De esta variable obtenemos su media 5.97 con desviación estándar 1.586 y con intervalo de confianza para la media con un nivel del 95% de (5.374, 6.559).

Con contrastes:

H_0: μ (notas del 1er examen dimensión visualización) = μ (notas del 2do examen dimensión visualización)
H_1: μ (notas del 1er examen dimensión visualización) ≠ μ (notas del 2do examen dimensión visualización)

O equivalentemente

H_0: μ (diferencia entre notas del 2do y 1ra examen, dimensión visualización) = 0

$\mathrm{H_1}$: μ (diferencia entre notas del 2^{do} y 1^{ra} examen, dimensión visualización) $\neq 0$

Con un estadístico de contraste t de Student de 20.603 con 29 grados de libertad y una significación de $p = 0.000 < 0.05$, rechazamos para un nivel de significación del 5 % la hipótesis nula y aceptamos la hipótesis alterna; es decir, que hay diferencias significativas en cuanto a las notas obtenidas en el segundo y el primer examen sobre resolución de problemas de conjuntos, dimensión visualización de las operaciones con conjuntos en la tabla BREL. De la misma manera, $0 \notin I = (5.374, 6.559)$, por lo que se confirma la desigualdad de medias al 95% de confianza. Desde que $\mu_2 - \mu_1 > 0,$ resulta $\mu_2 > \mu_1$, la media de las notas del segundo examen es mayor que la media de las notas del primer examen sobre resolución de problemas de conjuntos, dimensión visualización de las operaciones con conjuntos en la tabla BREL.

Hipótesis general: notas del examen sobre resolución de problemas de conjuntos utilizando la tabla BREL

Tabla 4

Prueba de muestras relacionadas para las notas del examen de resolución de problemas, utilizando la tabla BREL.

	Diferencias relacionadas							
				95% de intervalo de confianza de la diferencia				
Resolución de problemas con conjuntos	Media	Desviación estándar	Media de error estándar	Inferior	Superior	t	gl	Sig. (bilateral)
Notas del segundo examen - Notas del primer examen	5,866	1,408	0,257	5,341	6,392	22,827	29	0,000

Variable diferencias relacionadas: $d_i = Nota\ del\ examen\ 2_i - Nota\ del\ examen\ 1_i$ De esta variable obtenemos su media 5.87 con desviación estándar 1.408 y con intervalo de confianza para la media con un nivel del 95% de (5.341, 6.392).

Con contrastes:

$\mathrm{H_0}$: μ (notas del 1^{er} examen) $= \mu$ (notas del 2^{do} examen)
$\mathrm{H_1}$: μ (notas del 1^{er} examen) $\neq \mu$ (notas del 2^{do} examen)

O equivalentemente

$\mathrm{H_0}$: μ (diferencia entre notas del 2^{do} y 1^{ra} examen) $= 0$

H_1: μ (diferencia entre notas del 2^{do} y 1^{ra} examen) $\neq 0$

Con un estadístico de contraste t de Student de 22.827 con 29 grados de libertad y una significación de $p = 0.000 < 0.05$, rechazamos para un nivel de significación del 5 % la hipótesis nula y aceptamos la hipótesis alterna; es decir, que hay diferencias significativas en cuanto a las notas obtenidas en el segundo y el primer examen sobre resolución de problemas de conjuntos. De la misma manera, $0 \notin I = (5.341, 6{,}392)$, por lo cual confirmamos la desigualdad de medias al 95% de confianza. Más aun $\mu_2 - \mu_1 > 0$, luego $\mu_2 > \mu_1$, la media de las notas del segundo examen es mayor que la media de las notas del primer examen sobre resolución de problemas de conjuntos.

Conclusiones

En líneas generales, se puede concluir que los objetivos presumibles en la investigación se lograron al corroborarse las diferentes hipótesis. Para cada dimensión de la variable "resolución de problemas de conjuntos" se comprobó que los estudiantes no solamente lograron un gran dominio de las tablas BREL, sino que las notas del examen de salida superaron significativamente a las notas del examen de entrada. En efecto, para la dimensión, organización de los conjuntos en las tablas BREL, el incremento fue de 5.7 puntos en la escala vigesimal; para la dimensión, análisis de la secuencia lógica de operaciones con conjuntos en la tabla BRE, el aumento fue de 6 puntos; para la dimensión, visualización de las operaciones con conjuntos en la tabla BREL, el incremento.

Por medio de este artículo, divulgar los aportes de esta investigación, fundamentalmente entre los docentes, didactas e investigadores que estén interesados en la enseñanza de la teoría de conjuntos en el nivel secundario y terciario, para que el formato o uso de las tablas BREL, a partir de los cuestionamientos o posibilidades previsibles se sigan perfeccionado.

Divulgar entre los profesores de matemática del nivel medio y de los que están en formación en las Facultades de Educación del sistema universitario peruano las bondades del uso de la tabla BREL en la solución de problemas de teoría de conjuntos, y se extiendan a otros contenidos curriculares como al cálculo de probabilidades, sucesiones y progresiones, etc., lo cual motivará y facilitará el aprendizaje de la matemática. Proponer la investigación como material de consulta en Diplomados y Maestrías de Didáctica de la Matemática, Ciencias de la Educación o carreras afines que incluyan contenidos de la teoría de conjuntos, pues este material sumamente útil, sobre todo en la solución de problemas. Continuar, como líneas de investigación, los problemas que quedan abiertos en este trabajo.

Referencias

Claxton, G. (1984). *Live and Learn. Harper & Row*, Londres, Trad. cast.: Vivir y aprender (1987). Alianza, Madrid.

Chi, M. y Glaser, R. (1986). *Capacidad de resolución de problemas*. En J.Sternerg, Las capacidades humanas: un enfoque desde el procesamiento de la información. Labor, Barcelona. 293-324

Kelly, G.A. (1955). *The Psychology of Personal construis*. Norton. Nueva York.

Martínez, M.M. (1990). *Perspectivas sobre tipos y resolución de problemas*. Actas de las VII Jornadas de estudio sobre la Investigación en la Escuela, Sevilla. 38-44.

Mayer, R.E. (1986). *Pensamiento, resolución de problemas y cogni*ción. Paidós, Barcelona.

Simon, H.A. (1978). *La teoría del procesamiento de la información sobre la solución de problemas*. En Lecturas de Psicología del pensamiento, Carretero, M. y García Madruga. A., Alianza, Madrid. 197-220.

Vygotski, L.S. (1934). *Myshlenie i rech*. Trad. cast. Pensamiento y lenguaje. (1977). La Pléyade, Buenos Aires.

Vygotski, L.S. (1978). *Mind in society. Tite development of higiter psychological process*. Trad. cast. El desarrollo de los procesos psicológicos superiores. (1979). Crítica, Barcelona.